инж. Валентин Лишков

Благоевград
18.09.2009 г

<u>От лице на кръг към лице на триъгълник</u>

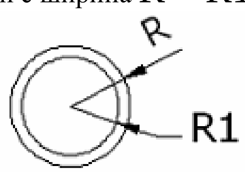
Лицето на кръг с радиус **R** е $S = \pi . R^2$

Лицето на триъгълник с височина $h = R$ и дължина на основата равна на обиколката (периметъра) на кръга $2.\pi.R$ е

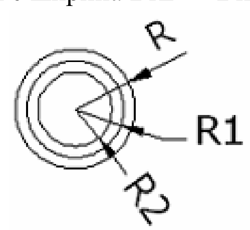
$$S = \frac{2.\pi.R.R}{2} = \pi.R^2$$

За да покажем защо формулите са еднакви ще изведем формулата за лице на кръг.

1. Всвки кръг с радиус R може да се разглежда съставен от кръг с радиус $R1 < R$ и пръстен с ширина $R - R1$



2. Всеки кръг с радиус $R1$ може да се разглежда съставен от кръг с радиус $R2 < R1$ и пръстен с ширина $R1 - R2$



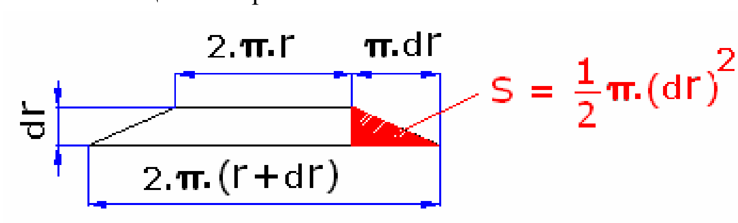
3. Можем да продължим този процес безкрайно. Всеки следващ кръг с радиус Ri ще съдържа кръг с радиус $Ri+1$ и пръстен с ширина $Ri - Ri+1$.
4. Можем да си представим кръга образуван от безброй мого пръстени и кръг в средата.

Нека $Ri - Ri+1$. клони към нула и $Ri - Ri+1. = \mathbf{d}r$.

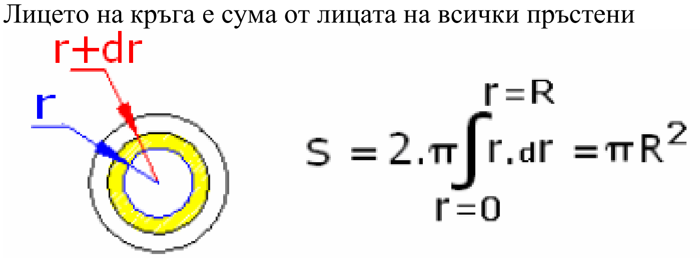
Ако броят на пръстените клони към безкрайност, то лицето и радиуса на кръга в средата ще клонят ким нула..

5. Да разгледаме пръстен с вътрешен радиус r ширина $\mathbf{d}r$ Разгъвката на пръстена е равнобедрен трапец с дължина на горната основа $2.\pi.r$, височина $\mathbf{d}r$ и дължина на долната основа $2.\pi.(r + \mathbf{d}r)$

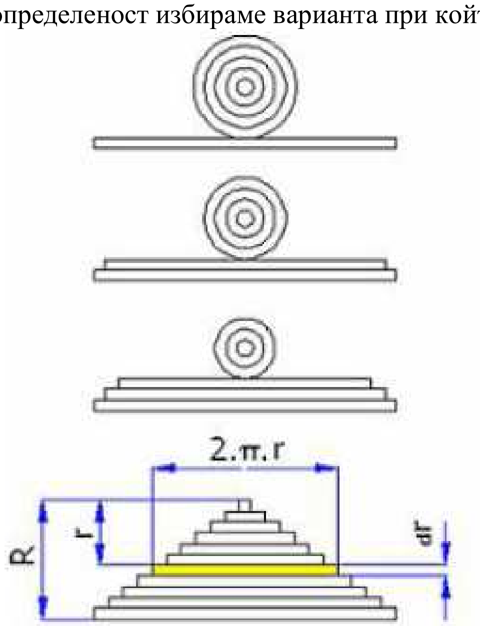
Лицето на трапеца се различава от лицето на правоъгълника с дължина $2.\pi.r$ и височина **dr** с безкрайно малко от втора степен. Тази разлика може да се пренебрегне и лицето на трапеца да се замени с лицето на правоъгълника $dS = 2.\pi.r.dr$



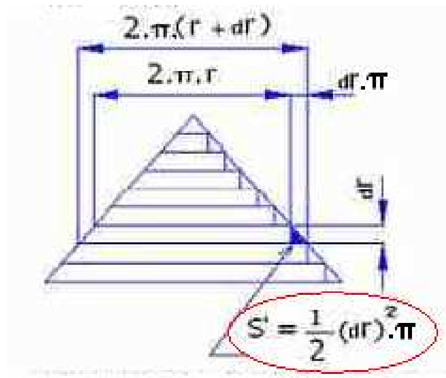
6. Лицето на кръга е сума от лицата на всички пръстени



7.Нека сега да разгънем всички пръстени и да ги наложим един върху друг подредени според дължината на правоъгълника. Основата е правоъгълника с най-голяма дължина.
Можем да изберм средите или краищата им да образуват верткална линия.
За определеност избираме варианта при който средите определят вертикална линия

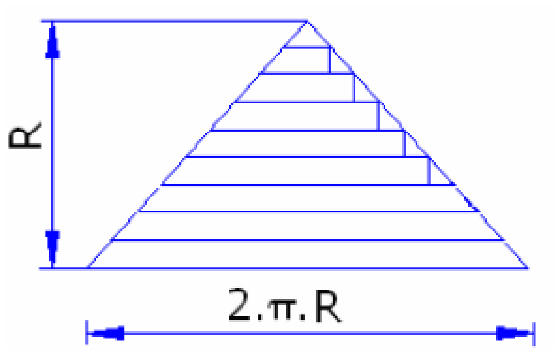


Сумата от лицата на тези правоъгълници ще се различава от лицето на кръга с безкрайно малко от втора степен и тази разлика се пренебрегва.



Обединението на правоъгълниците се различава от равнобедрен триъгълник също с безкрайно малко от втора степен и се пренебрегва.

Този равнобедрен триъгълник е с височина R и дължина на основата $2.\pi.R$

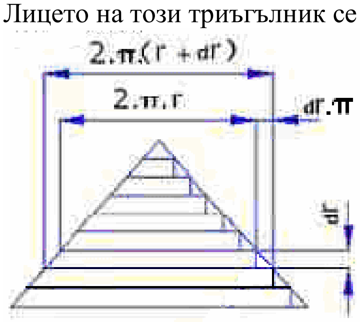


и неговото лице е

$$S = \frac{2.\pi.R.R}{2} = \pi.R^2$$

същото лице има и кръга.

Лицето на този триъгълник се пресмята със същи интеграл с който се пресмята лицето на кръга



$$S = 2.\pi \int_{r=0}^{r=R} r.dr = \pi R^2$$

Това открива въпроса за взаимно-еднозначното съответствие между точките на кръг и триъгълник